

ODQ Toolbox User's Manual
Ver. 1.0

森田亮介 東俊一 南裕樹 杉江俊治

2009年1月

目次

1	はじめに	2
2	動的量子化器の最適設計理論	3
2.1	制御系における量子化器設計	3
2.2	動的量子化器問題の定式化	4
2.3	性能解析と設計アルゴリズム	8
3	ODQ Toolbox	11
3.1	システムの表現	13
3.2	システム G の計算	13
3.3	動的量子化器 Q の導出	13
3.4	動的量子化器 Q の解析	15
4	実験検証	15
4.1	離散値入力型フィードバック制御系の構築	15
4.2	実験結果	17
5	関数リファレンス	22
5.1	COMPQ	22
5.2	ODQ	23
5.3	ODQREAL	25
5.4	ODQGAIN	26
5.5	ODQCOST	27
5.6	ODQSTB	28
6	シミュレーション用 Simulink ブロック	29

1 はじめに

近年，離散値信号拘束が課せられた制御系に関する研究が盛んになされている．これは，低コスト化や小型化のために，デジタル通信路や ON/OFF 型のアクチュエータ，低ビット数のプロセッサなどが，制御系を構成する要素として検討されているためである．実際，制御系のネットワーク化や組込み化を考える上で，そのようなデバイスの利用は欠かせない．

著者らも，そのような厳しい拘束下での制御系設計のために，動的量子化器の最適設計問題を検討し，最適解の解析的導出 [1, 2]，設計手法の開発 [3]，構造解析 [4] といった一連の成果を得ている．そして，従来の線形制御理論に基づく制御系設計への道を拓いた．

しかしながら，理論面での整備は進んできたものの，アルゴリズムの複雑さもあり，一般の制御系設計技術者が容易に利用できる状況にあるとはいえない．さらに実験検証が十分になされてはいない．

そこで，本論文では，著者らの動的量子化器の実応用を目指して行なったつぎの 2 点について報告する．

- 設計支援ソフトウェア ODQ Toolbox の開発
- 倒立振子を対象とした離散値入力型制御の実機実験

ODQ Toolbox は，制御系における動的量子化器の解析，設計，評価を行なうための MATLAB の Toolbox であり，ODQ は Optimal Dynamic Quantizer の略である．これを用いることで，制御理論の専門家でなくとも，最適な動的量子化器の開発が行なえる．このようなソフトウェアツールを開発することは，理論と産業界を結びつける上で重要な役割を演じる．

また，著者らの設計理論と Toolbox の有用性を検証するため，倒立振子を対象とした実機実験を行なった．その結果，3 値の離散値入力 $\{-1, 0, +1\}$ で，振子を良好に倒立させることに成功した．これは，一般に制御が難しいとされる非最小位相系に対し，離散値入力型制御を考える上で最小の入力値数（3 値）で制御目的を達成したものであり，最も厳しい条件下での実験結果と考えられる．したがって，この成果は，動的量子化器の実応用を考える際の基礎を与えるものとなる．

[記法] \mathbf{R} , \mathbf{R}_+ , \mathbf{N} , \mathbf{N}_+ は，それぞれ，実数，正の実数，非負の整数，正の整数からなる集合を表し， I で単位行列を表す．行列 $M := \{M_{ij}\}$ に対し， $\text{abs}(M)$ で M のおのお

の要素の絶対値で構成される行列（つまり $\text{abs}(M) := \{|M_{ij}|\}$ ）を表す．また，ベクトル x ，行列 M ，ベクトル列 $X := (x_1, x_2, \dots)$ に対し， $\|x\|$ ， $\|M\|$ ， $\|X\|$ は，それらの ∞ ノルムを表す．

2 動的量子化器の最適設計理論

ODQ Toolbox で扱える問題やコマンドの役割を明確にするため，動的量子化器の最適設計論 [1, 2, 3, 4] を，ユーザへの紹介という立場からまとめる．

2.1 制御系における量子化器設計

制御対象への入力が（通常の）連続値の信号となる場合，Fig. 1 (a) のフィードバック系が構成されるのが標準的である．ここで， P と K は制御対象と制御器であり， K は，従来の制御理論によって容易に得られる．一方， P に搭載されたアクチュエータが多段階型（ON-OFF 型など）の場合，制御入力は離散値の信号に限定される．それゆえ，同じフィードバック系を構成しても，望ましい振舞いが得られるとは限らない．

さて， P の入力が離散値に制限されたとき，どのように制御系を構築したらよいであろうか？

ひとつの答えとしては，「 P の入力が連続値である」と仮定して K を設計し，Fig. 1 (b) に示されるように，ある量子化器 Q と一緒に用いることが考えられる．この場合，四捨五入的に値を丸めるような単純な量子化器を用いたのでは，良い結果は期待できないが，量子化器を連続値信号から離散値信号への写像と捉え，これを適切に設計することで良好な結果が期待できる．

このような制御系における量子化器の設計は， P の入力が離散値に限定される場合に限らず，さまざまな状況で必要とされる．たとえば， K がデジタル装置で実装されることで P や K の入力が離散値信号に制限されるときや， P と K が互いに離れた場所にあり，デジタル通信路を介して，互いの信号の受け渡しをする場合などである．よって，一般的には，「制御系において，いくつかの信号が離散値に制限されたとき，いかに量子化器を設計するか？」が検討課題となる．

そこで，本論文ではつぎの 3 つの設計問題を考える．

(Q1) フィードバック入力量子化問題

Fig. 1 (a) と (b) のシステムを考える．このとき，任意に与えられた (P, K) に対し，この 2 つのシステムの入出力特性を近くするような Q を求めよ．

(Q2) フィードバック出力量子化問題

Fig. 1 (a) と (c) のシステムを考える．このとき，任意に与えられた (P, K) に対し，この2つのシステムの入出力特性を近くするような Q を求めよ．

(Q3) フィードフォワード入力量子化問題

Fig. 2 (a) と (b) のシステムを考える．このとき，任意に与えられた P に対し，この2つのシステムの入出力特性を近くするような Q を求めよ．

いずれの問題も，「量子化器を含まない理想的なシステム」と「量子化器を含むシステム」の差を小さくする量子化器を求める問題となっている．そして，それらの解によって，信号が離散値に拘束された場合でも，その拘束を無視して設計された K （従来の制御理論で設計されたもの）が適用できるようになる．

この際，(Q1) は， P の入力に離散値に制限された場合に，有効な量子化器を与える．(Q2) は， K の入力に離散値に制限された場合に検討される．

また，(Q3) は，「 P の入力は離散値に制約されているが， K は定められていない」といった場合に考えられる問題である．この解によって，Fig. 2 (b) のシステム全体を，連続値入力のシステムと近似的にみなせるようになり，これを制御対象として K の設計が行なえるようになる．

2.2 動的量子化器問題の定式化

それでは，(Q1) ~ (Q3) を具体的に定式化しよう．

Fig. 3 (a) に示されるシステム Σ_Q を考える．ここで， G は離散時間線形システム

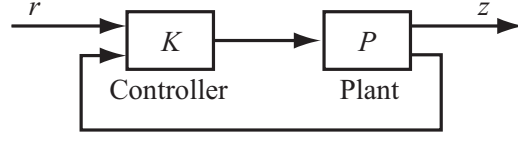
$$G : \begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 r(k) + B_2 v(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_1 r(k) \\ u(k) &= C_2 x(k) + D_2 r(k) \end{cases} \quad (1)$$

であり， $x \in \mathbf{R}^n$ は状態， $r \in \mathbf{R}^p$ ， $v \in \mathbf{R}^m$ は入力， $z \in \mathbf{R}^l$ ， $u \in \mathbf{R}^m$ は出力， $k \in \mathbf{N}$ は離散時刻， $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $B_1 \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ， $B_2 \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ， $C_1 \in \mathbf{R}^{l \times n}$ ， $C_2 \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ， $D_1 \in \mathbf{R}^{l \times p}$ ， $D_2 \in \mathbf{R}^{m \times p}$ は定数行列である．初期状態は， $x_0 \in \mathbf{R}^n$ によって $x(0) = x_0$ と与えられる．

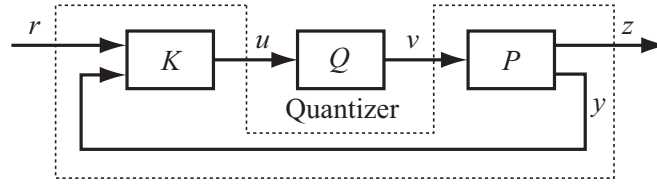
Q は量子化器であり，本論文では，つぎのように与えられる動的なもの考える．

$$Q : \begin{cases} \xi(k+1) &= A\xi(k) + \mathcal{B}_1 u(k) + \mathcal{B}_2 v(k) \\ v(k) &= q(\mathcal{C}\xi(k) + u(k)) \end{cases} \quad (2)$$

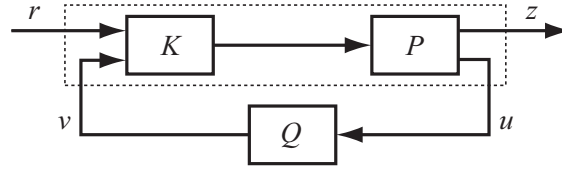
ここで， $\xi \in \mathbf{R}^{\mathcal{N}}$ ， $u \in \mathbf{R}^m$ ， $v \in \mathbf{V}^m$ は，それぞれ（この量子化器の）状態，入力，出力を表す．また， $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}$ は離散集合， $A \in \mathbf{R}^{\mathcal{N} \times \mathcal{N}}$ ， $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathbf{R}^{\mathcal{N} \times m}$ ， $\mathcal{C} \in \mathbf{R}^{m \times \mathcal{N}}$ は定数



(a) Usual feedback system.



(b) Feedback system with input quantizer.



(c) Feedback system with output quantizer.

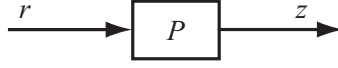
Fig. 1 Three types of feedback systems.

行列, $q: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{V}^m$ は静的量子化器であり, 初期状態は $\xi(0) = 0$ と与えられるものとする. なお, 表記の簡単のため, Q は, そのパラメータの組として, $(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C})$ などとも記される.

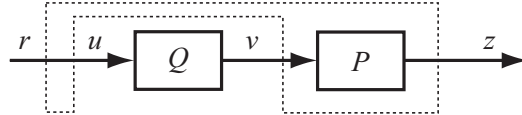
システム Σ_Q に対しては, つぎの記号が用いられる. まず, $T \in \mathbf{N}_+$ を, Q の性能を評価する時間とする. そして, 初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ のもとで, 入力列 $R := (r_0, r_1, \dots, r_{T-1}) \in \mathbf{R}^{pT}$ が印加されたときの, Σ_Q の出力列 ($k = 1, 2, \dots, T-1$ の出力列) を $Z_Q(x_0, R)$ で表し, 時刻 k での出力を $z_Q(k, x_0, R)$ で表す. また, Σ_Q から, Q を取り除いた Fig. 3 (b) のシステム Σ を考え, 記号 $Z(x_0, R)$, $z(k, x_0, R)$ を同様に定義する.

加えて, Q に対し, システムゲインを定義しておく. 静的量子化器 q で発生する量子化誤差を表現する変数 $w \in [-d/2, d/2]^m$:

$$w(k) := q(\mathcal{C}\xi(k) + u(k)) - (\mathcal{C}\xi(k) + u(k)) \quad (3)$$



(a) Usual controlled plant.



(b) Controlled plant with input quantizer.

Fig. 2 Two types of feedforward systems.

を導入する．すると， Q をつぎのように表現できる．

$$Q : \begin{cases} \xi(k+1) = (A + \mathcal{B}_2 \mathcal{C})\xi(k) + (\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)u(k) \\ v(k) = \mathcal{C}\xi(k) + u(k) + w(k) \end{cases} + \mathcal{B}_2 w(k) \quad (4)$$

このとき， u と w を互いに独立な外部入力と考え（(3) 式の関係を見捨てる）， v を出力と考えた際の ℓ_∞ ゲイン

$$\|Q_{uv}\| := \sup_{U \in \mathbf{R}^{mT} \setminus \{0\}} \frac{\|Q(U, (0, 0, \dots, 0))\|}{\|U\|} \quad (5)$$

$$\|Q_{wv}\| := \sup_{W \in [-d/2, d/2]^{mT} \setminus \{0\}} \frac{\|Q((0, 0, \dots, 0), W)\|}{\|W\|} \quad (6)$$

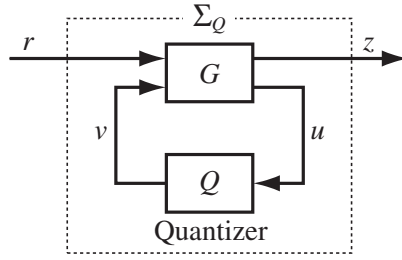
を Q のゲインと定義する．ここで， $Q(U, W)$ は，(4) 式の u と w に，入力列 $U := (u_0, u_1, \dots, u_{T-1}) \in \mathbf{R}^{mT}$ と量子化誤差列 $W := (w_0, w_1, \dots, w_{T-1}) \in [-d/2, d/2]^{mT}$ が与えられたときの出力列を表す（ $\xi(0) = 0$ に注意）．

このとき， Q の設計問題はつぎのように定式化される．

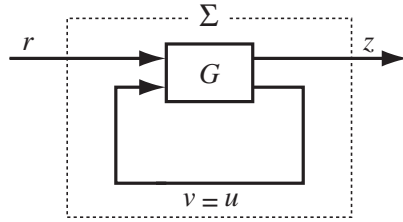
問題 1 システム Σ_Q に対し， Q の性能を評価する時間 $T \in \mathbf{N}_+ \cup \{\infty\}$ とゲインの上界値 $\gamma_{uv}, \gamma_{wv} \in \mathbf{R}_+$ が任意に与えられるものとする．このとき，

(S1) Q が BIBO 安定，

(S2) $\|Q_{uv}\| \leq \gamma_{uv}$ ， $\|Q_{wv}\| \leq \gamma_{wv}$



(a) Feedback system with quantizer.



(b) Feedback system without quantizer.

Fig. 3 Two feedback control systems.

を満たし，評価関数

$$E(Q) := \sup_{(x_0, R) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{pT}} \|Z_Q(x_0, R) - Z(x_0, R)\| \quad (7)$$

を最小にする Q (つまり $N, \mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{C}$) を求めよ．

問題 1 は，(Q1) ~ (Q3) の具体的かつ一般的表現となっている．実際，Fig. 1 (b), (c) および Fig. 2 (b) のシステムは，点線で記された部分を G とすれば， Σ_Q として表現できる．また，このときの Σ が，Fig. 1(a) と Fig. 2(a) のシステムに対応することも明らかである．

$E(Q)$ によって，理想的なシステム Σ と量子化器を含むシステム Σ_Q の差が計られ，これが小さいことは，2つのシステムの入出力特性が近いことを意味する．また，仕様 (S1) は，動的な量子化器を考える上で，最も基礎的なものである．後ほど詳述するが，(S1) が満たされれば，ある緩い条件のもとで， Σ の安定性が Σ_Q に保存される．一方，(S2) は， G への入力 (Q の出力) の大きさを制約するために設けられたものである．実際，

$\|W\| \leq d/2$ が成り立つことに注意すれば, G の入力 v に対し, つぎの不等式が得られる.

$$\|v(k)\| \leq \gamma_{uv}\|U\| + \gamma_{wv} \frac{d}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, T) \quad (8)$$

このとき, $\|U\| \leq M$ となる有界な数 M が存在するならば, γ_{uv} と γ_{wv} の値を小さく設定することで, $v(k)$ の振幅をある範囲内に留めておくことができる. ただし, (4) 式において, u と w に関する直達項があるので, 問題 1 は, $1 \leq \gamma_{uv}$ かつ $1 \leq \gamma_{wv}$ であるときに限って可解であることに注意されたい.

2.3 性能解析と設計アルゴリズム

問題 1 はいくつかの条件のもとで, 完全に解くことができる. また, それらが満たされないときも実用的な解を得ることができる. 本節ではそれについて説明する.

まず, つぎの仮定を設ける.

(A1) $\text{rank } D_2 = m$.

(A2) 与えられた $d \in \mathbf{R}_+$ に対し, $\mathbf{V} = \{0, \pm d, \pm 2d, \dots\}$.

(A3) q は $-\infty$ 方向の最近型の量子化器^{*1}.

(A1) は G に関するものであり, r が冗長性をもたないことを意味する. (A2) と (A3) は Q に対する仮定である. (A2) では, \mathbf{V}^m が, \mathbf{R}^m 上の間隔 d の格子点であることを意味している. これは, 多段階型のアクチュエータや標準的な A/D 変換器が用いられる場合に対応させたものである. (A3) は, 最近型の量子化器が, もっとも簡単かつ実用的であることから設定されている.

以上の準備のもと, まずは, Q の性能評価に関する結果を与えよう.

定理 1 (Minami, Azuma & Sugie [1, 2]) Σ_Q に対し, Q と $T \in \mathbf{N}_+ \cup \{\infty\}$ が任意に与えられるものとする. このとき, つぎが成り立つ.

$$E(Q) = \begin{cases} \left\| \sum_{k=0}^{T-1} \text{abs} \left([C_1 \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{A} & B_2 C \\ 0 & A + B_2 C \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \right\| \frac{d}{2} \\ \text{if } [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{A} & B_2 C \\ 0 & A + B_2 C \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 + B_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\forall k \in \mathbf{N}) \\ \infty \quad \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

ここで, $\tilde{A} := A + B_2 C_2$ である.

^{*1} たとえば, $\mu := [d/2 \ d/2]^\top$ に対し $q(\mu) = [0 \ 0]^\top$, $\mu := [d/2 \ -d/2]^\top$ に対し $q(\mu) = [0 \ -d]^\top$.

定理 1 は, 評価関数 $E(Q)$ を, G と Q の陽な関数として表現している. これにより, 与えられた Q の性能を実際に計算することができる.

また, この結果を用いると, 問題 1 はつぎのように表現できる (以下, これを「問題 1」と表記する).

$$\begin{aligned} \min_{\substack{N \in \mathbf{N}_+ \\ A \in \mathbf{R}^{N \times N} \\ B_1 \in \mathbf{R}^{N \times m} \\ B_2 \in \mathbf{R}^{N \times m} \\ C \in \mathbf{R}^{m \times N} \\ \mathcal{H}_{1k} \in \mathbf{R}^{m \times m} \\ \mathcal{H}_{2k} \in \mathbf{R}^{m \times m} \\ (k=0, 1, \dots, T-1)}} & \left\| \text{abs}(C_1 B_2) + \sum_{k=1}^{T-1} \text{abs} \left(C_1 \tilde{A}^k B_2 + \Phi_k \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{20} \\ \mathcal{H}_{21} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{2(k-1)} \end{bmatrix} \right) \right\| \\ \text{s.t.} & \left\{ \begin{array}{l} \Phi_k \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{10} \\ \mathcal{H}_{11} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{1(k-1)} \end{bmatrix} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, T-1) \\ (S1) \\ \left\| I + \sum_{k=0}^{T-1} \text{abs}(\mathcal{H}_{1k}) \right\| \leq \gamma_{uv}, \quad \left\| I + \sum_{k=0}^{T-1} \text{abs}(\mathcal{H}_{2k}) \right\| \leq \gamma_{wv} \\ \mathcal{H}_{1k} = C(A + B_2 C)^k (B_1 + B_2) \quad (k=0, 1, \dots, T-1) \\ \mathcal{H}_{2k} = C(A + B_2 C)^k B_2 \quad (k=0, 1, \dots, T-1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

ここで, $\Phi_k := [C_1 \tilde{A}^{k-1} B_2 \quad C_1 \tilde{A}^{k-2} B_2 \quad \dots \quad C_1 B_2]$ であり, 目的関数と第一の拘束条件で $E(Q)$ を表現している. また, 第二, 第三の条件で (S1), (S2) を表し, 残りは変数の置き換えを表現している. この問題は, 変数同士の積があるため非凸な問題であるが, つぎのようにして, 最適解のひとつを得ることができる.

定理 2 (Azuma & Sugie [3]) システム Σ_Q に対し, $T \in \mathbf{N}_+ \cup \{\infty\}$, $\gamma_{uv}, \gamma_{wv} \in \mathbf{R}_+$ が任意に与えられるものとする. このとき, 問題 1 が可解 ($1 \leq \gamma_{uv}, 1 \leq \gamma_{wv}$) かつ (A1) ~ (A3) が成り立つならば, つぎの手続きによって得られる Q は, 問題 1 の解である.

Step 1: 線形計画による数値最適化

問題 1' からいくつかの拘束条件を取り除いて得られる緩和問題 (線形計画問題)

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\mathcal{H}_{2k} \\ (k=0, 1, \dots, T-1)}} & \left\| \text{abs}(C_1 B_2) + \sum_{k=1}^{T-1} \text{abs} \left(C_1 \tilde{A}^k B_2 + \Phi_k \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{20} \\ \mathcal{H}_{21} \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{2(k-1)} \end{bmatrix} \right) \right\| \\ \text{s.t.} & \left\| I + \sum_{k=0}^{T-1} \text{abs}(\mathcal{H}_{2k}) \right\| \leq \gamma_{wv} \end{aligned}$$

を解き, その解 $(\mathcal{H}_{20}^\bullet, \mathcal{H}_{21}^\bullet, \dots, \mathcal{H}_{2(T-1)}^\bullet)$ を得る.

Step 2: 特異値分解

緩和問題の解に対しブロックハンケル行列 $\mathcal{H}^\bullet \in \mathbf{R}^{mT' \times mT'}$ を構成する. そして, これ

を $\mathcal{H}^\bullet = \mathcal{W}_o^\bullet \mathcal{S}^\bullet \mathcal{W}_c^\bullet$ のように特異値分解して行列 $\mathcal{W}_o^\bullet, \mathcal{S}^\bullet, \mathcal{W}_c^\bullet \in \mathbf{R}^{mT' \times mT'}$ を得る．ただし, $T' := \lfloor T/2 \rfloor + 1$ であり, $T \in \{2, 4, \dots\}$ のときは, \mathcal{H}^\bullet の第 (T', T') ブロックに任意の行列を設定する．

Step 3 : Q の構成

つぎの記号を定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^\circ &:= mT' \\ \mathcal{A}^\circ &:= ([I_{m(T'-1)} \quad 0_{m(T'-1) \times m}] \mathcal{W}_o^\bullet (\mathcal{S}^\bullet)^{(1/2)})^\dagger \\ &\quad \cdot [0_{m(T'-1) \times m} \quad I_{m(T'-1)}] \mathcal{W}_c^\bullet (\mathcal{S}^\bullet)^{(1/2)} - \mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ \\ \mathcal{B}_2^\circ &:= (\mathcal{S}^\bullet)^{(1/2)} \mathcal{W}_c^\bullet [I_m^\top \quad 0]^\top \\ \mathcal{C}^\circ &:= [I_m \quad 0] \mathcal{W}_o^\bullet (\mathcal{S}^\bullet)^{(1/2)} \\ \bar{\mathcal{N}}^\circ &:= \mathcal{N}^\circ T \\ \bar{\mathcal{A}}^\circ &:= \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}^\circ + \mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^\circ + \mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{A}^\circ + \mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ \\ -\mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ & -\mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ & \dots & -\mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ & -\mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ \end{bmatrix} \\ \bar{\mathcal{B}}_2^\circ &:= [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ (\mathcal{B}_2^\circ)^\top]^\top \\ \bar{\mathcal{C}}^\circ &:= [\mathcal{C}^\circ \ \mathcal{C}^\circ \ \dots \ \mathcal{C}^\circ] \end{aligned}$$

このとき, 行列 $\mathcal{A}^\circ + \mathcal{B}_2^\circ \mathcal{C}^\circ$ が安定ならば, Q として, $(\mathcal{N}^\circ, \mathcal{A}^\circ, -\mathcal{B}_2^\circ, \mathcal{B}_2^\circ, \mathcal{C}^\circ)$ を出力し, そうでないときは, $(\bar{\mathcal{N}}^\circ, \bar{\mathcal{A}}^\circ, -\bar{\mathcal{B}}_2^\circ, \bar{\mathcal{B}}_2^\circ, \bar{\mathcal{C}}^\circ)$ を出力する．

定理 2 によって, 問題 1 の解を導出する具体的なアルゴリズムが与えられる．

例題 1 Fig. 1 (b) のシステムを考える．ここで, P と K は, つぎの連続時間の制御対象と制御器を, サンプルング周期 $0.1[\text{sec}]$ で離散化したものである．

$$\begin{aligned} P_c : \begin{cases} \dot{x}_P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} x_P(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ z(t) = [1 \ 0] x_P(t) \\ y(t) = x_P(t) \end{cases} \\ K_c : u(t) = r(t) + [2 \ -4] y(t) \end{aligned}$$

このとき, 定理 2 から得られる Q を用いた場合のシステムの応答は Fig. 4 のようになる．ここで, $x_P(0) = [-1 \ 2]^\top$, $r(k) \equiv 0$, $d := 10$ であり, Q は, $\gamma_{uv} := 1$, $\gamma_{vw} := 2$, $T := 100$ に対して導出されている．

出力応答のグラフ（三番目）において，細線で Fig. 1 (a) のシステム（通常のフィードバック系）の出力応答を併せて示しているが，入力が離散値に制限されているにもかかわらず，最適な動的量子化器を用いることで，連続値入力型の制御に近い応答が得られることが確認できる．

本節の最後に，いくつかの注意事項を述べておく．

まず，定理 2 の方法は，線形計画と特異値分解に基づくものであり，その計算量は，システム G のサイズ（ n, m など）と問題のサイズ（ T と γ_{uv}, γ_{vw} ）の多項式時間である．したがって，問題 1 の解のひとつを効率的に導出することが可能である．

つぎに， $B_1 = -B_2$ となる Q に対しては，「 Σ が安定かつ (S1) が成り立つ」ことと「 Σ_Q に含まれるすべての信号の有界」であることが等価となる [5]．一方，定理 2 の Step 3 で示すように，提案アルゴリズムからは， $B_1 = -B_2$ を満たす Q が得られる．したがって， Σ を安定なシステムとして設定すれば（普通はそのように与えられるが），結果として得られる Σ_Q において，信号の有界性が保証される．

最後に，(A1) ~ (A3) のいくつか（すべてが）成り立たない場合でも，条件

(A4) 与えられた q と V に対し，ある $D \in \mathbf{R}_+$ が存在して， $\|q(\mu) - \mu\| \leq D/2$ が成り立つ

が成り立てば，定理 1 の代わりに

$$E(Q) \begin{cases} \leq \left\| \sum_{k=0}^{T-1} \text{abs} \left([C_1 \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{A} & B_2 C \\ 0 & A + B_2 C \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \right\| \frac{D}{2} \\ \quad \text{if } [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{A} & B_2 C \\ 0 & A + B_2 C \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 + B_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\forall k) \\ = \infty \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

の関係が得られる．したがって，(A4) を満たすように q を固定して考える限り，与えられた Q の性能の上界を計算できる．また，定理 2 から，上界を最小化する Q が得られる．

3 ODQ Toolbox

ODQ Toolbox は，動的量子化器の設計支援のためのソフトウェアである．Table. 1 に示されるコマンドが用意されており，これらを組み合わせることで，制御系において高い性能を発揮する動的量子化器を容易に開発することができる．インターネットサイト [6] からダウンロードでき，フリーでの利用が可能である．

以下では，コマンドの記述にタイプライタ体を用いるが，入出力変数に関しては，特に

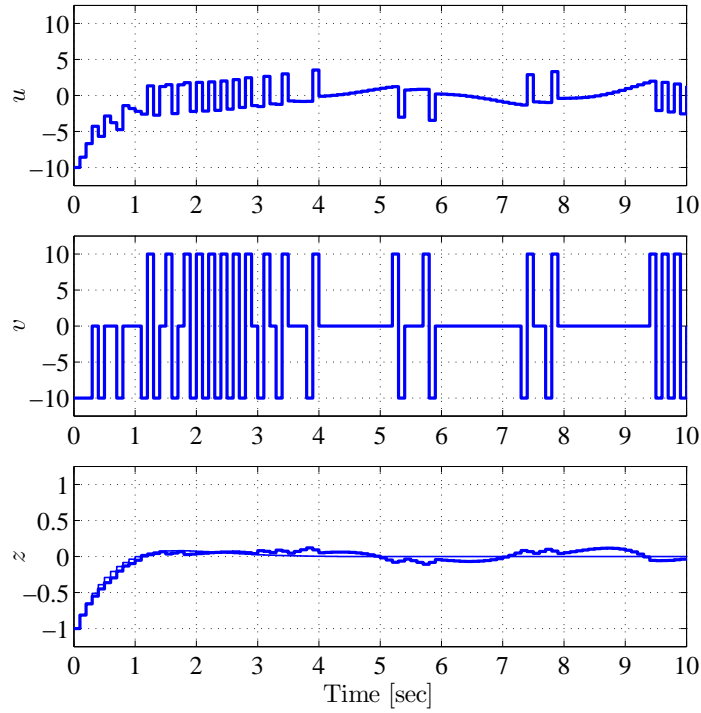


Fig. 4 Simulation result.

Table 1 Command list.

Command	Description
$G = \text{compg}(P, K, \text{con})$	Computes the state space representation of G .
$[Q \ E \ Hk] = \text{odq}(G, T, d, \text{gamma}, \text{dim}, \text{solver})$	Computes an optimal dynamic quantizer Q and the cost $E(Q)$.
$Q_{\text{red}} = \text{odqreal}(G, Hk, \text{dim})$	Reduces the order of Q to the dim -dimension.
$\text{gain} = \text{odqgain}(Q, T)$	Computes the values of $\ Q_{uv}\ $ and $\ Q_{wv}\ $ in T steps.
$E = \text{odqcost}(G, Q, d, T)$	Computes the value of $E(Q)$ in T steps.
$\text{stb} = \text{odqstb}(Q)$	Checks the stability of Q

断りがない限り，本文中のイタリック体で記された記号と同じものを表す点に注意されたい．たとえば， T は T ， d は d を表す．

3.1 システムの表現

本 Toolbox において, システム P, K, G, Q は Table. 2 で示される構造体変数によって表現される. ここで, P と K は

$$P : \left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \\ \hline C_{1P} & 0 \\ C_{2P} & 0 \end{array} \right], \quad K : \left[\begin{array}{c|cc} A_K & B_{1K} & B_{2K} \\ \hline C_K & D_{1K} & D_{2K} \end{array} \right] \quad (10)$$

で与えられるものであり, C_{1P} と C_{2P} は, それぞれ評価出力と観測出力に対応する係数行列, (B_{1K}, D_{1K}) と (B_{2K}, D_{2K}) は, それぞれ外部入力とフィードバック入力に対応する係数行列である. また, G と Q は, (1) 式と (2) 式で定義されるものである.

3.2 システム G の計算

2.2 および 2.3 節は, Fig. 3 のシステム表現を基にしているため, Q の設計問題 (Q1) ~ (Q3) を解くためには, いま対象としているシステム (Fig. 1 (b), (c) もしくは Fig. 2(b) のシステム) から対応する G を計算する必要がある. そのために用意されているコマンドが `compg` である. たとえば, Fig. 1 (b) のシステムに対しては, P と K を定義した後, 接続関係を表現する文字列 `fbiq` を用いて

```
>> G = compg(P,K,'fbiq');
```

とすることで, G を計算できる. また, `fbiq` の代わりに, `fboq` とすれば, Fig. 1 (c) に対するもの, `ff` とすれば, Fig. 2 (b) に対するものを得ることができる.

3.3 動的量子化器 Q の導出

2.3 節で示したとおり, 定理 2 のアルゴリズムによって, 問題 1 の解が与えられるが, それを実行するコマンドが `odq` である. これはつぎのように記述される.

```
>> [Q E Hk]=odq(G,T,d,gamma,solver);
```

入力変数において, `gamma` は, uv と wv をメンバとして持つ構造体であり, γ_{uv} と γ_{wv} を表現している. `solver` は, 定理 2 の Step 1 で用いる線形計画問題のソルバを指定するものであり, Optimization Toolbox の `linprog`[7] (`solver='linprog'`) もしくは ILOG 社の `CPLEX`[8] (`solver='cplex'`) を指定することができる. なお, `CPLEX` を用いる

Table 2 System representation.

Struct.	Member	Symbol	Struct.	Member	Symbol
P	a	A_P	G	a	A
	b	B_P		b1	B_1
	c1	C_{1P}		b2	B_2
	c2	C_{2P}		c1	C_1
K	a	A_K		c2	C_2
	b1	B_{1K}		d1	D_1
	b2	B_{2K}		d2	D_2
	c	C_K		Q	a
	d1	D_{1K}	b1		B_1
	d2	D_{2K}	b2		B_2
		c	C		

際は，MATLAB とのインターフェース [9] が必要である．一方，出力変数において， E は，得られた Q に対する評価関数の値を表し，定理 1 を利用して計算される．また， H_k は， H, W_o, S, W_c メンバとして持つ構造体であり，定理 2 の Step 2 で得られるブロックハンケル行列 \mathcal{H}^* とその特異値分解 W_o^*, S^*, W_c^* を格納している． H_k は， Q の別表現ともなっており，低次元化など， Q を再設計（改良）する際に利用される．

これによって問題 1 の解が与えられるが， Q の次元は， $N = m \lfloor T/2 \rfloor + 1$ となる点に注意が必要である．このことは， T が大きく設定されると， N が大きくなるために Q の実装が難しくなることを意味している．その際には，コマンド `odqreal` をつぎのように用いることで， Q を dim 次元に低次元化することができる．

```
>> Qred = odqreal(G,Hk,dim);
```

これは，低次元化の対象となる Q に対し，(4) 式の線形システム表現 (u と w を互いに独立な入力と仮定する) を考え，Ho-Kalman の実現 [10] を利用して低次元化を行なうものである．ここで， Q の代わりに H_k を入力変数とすることによって，特異値分解の計算を省いている点に注意されたい．

なお，コマンド `odq` に，

```
>> [Q E Hk]=odq(G,T,d,gamma,dim,solver);
```

のように，入力変数として dim を加えることで，問題 1 の解の導出とその解の低次元化を一緒に行なうこともできる．

3.4 動的量子化器 Q の解析

任意に与えられた Q を解析するためのコマンドも用意されている．

まず，指定された終端時刻 T に対する Q のゲインは，つぎのようにして計算できる．

```
>> gain = odqgain(Q,T);
```

ここで， gain は， uv と wv をメンバとする構造体であり， $\|Q_{uv}\|$ と $\|Q_{wv}\|$ を表現している．

また，終端時刻 T に対する評価関数 $E(Q)$ の値は，つぎのように求められる．

```
>> E = odqcost(G,Q,T);
```

量子化器 Q の安定性 [4] も

```
>> stb=odqstb(Q);
```

にて判定することができ，安定な場合は $\text{stb}=1$ ，そうでない場合には $\text{stb}=0$ となる．

以上の解析コマンドは，試行錯誤的に Q を設計する際や，低次元化などでコマンド odq の出力を修正した際に用いられる．また， T を大きくするにつれて，コマンド odq の計算時間は大きくなるため，大きい T に対して odq を実行することは現実的ではない．そこで， T を所望の値よりも小さく設定した上で odq を実行し，得られた Q に対して，所望の T における制約条件の充足および性能の検証を行うことも考えられる．このようなときにも解析コマンドが利用される．

4 実験検証

本章では，実システムへの適用例として，倒立振子の離散値入力型制御への応用について説明する．

4.1 離散値入力型フィードバック制御系の構築

制御対象は Fig. 5 に示される回転型の倒立振子である．このシステムでは，水平軸回りに回転するアームはモータによって直接駆動されるが，垂直軸回りに回転する振子には

アクチュエータは備えられていない．アームおよび振子の角度はエンコーダによって測られ，倒立状態からの振れ角は ϕ と θ (単位は [rad]) で表される．

このとき，状態を $x_P := [\theta \ \dot{\theta} \ \phi \ \dot{\phi}]^\top$ ，入力をモータへの印加電圧 v (単位は [V])，評価出力を $[\theta \ \phi]^\top$ ，観測出力を $[\theta \ \dot{\theta} \ \phi \ \dot{\phi}]^\top$ とすると，このシステムの連続時間モデルはつぎのように与えられる．

$$\begin{cases} \dot{x}_P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30.68 & -0.24 & 0 & -0.83 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.44 & -0.01 & 0 & -0.56 \end{bmatrix} x_P(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4.14 \\ 0 \\ 2.79 \end{bmatrix} v(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_P(t) \\ y(t) = x_P(t) \end{cases}$$

ここでの目的は，このシステムの評価出力 z を離散値入力 $v(k) \in \{-10, 0, +10\}$ で，倒立状態の近傍 ($z \simeq 0$) に留めておくことである．

そのために，Fig. 1 (b) の制御系を考えよう． P は，上記の連続時間モデルをサンプリング周期 0.005[sec] で離散化したものである． K は，Fig. 1 (a) の量子化器を含まない理想的な制御系において，評価関数

$$J := \sum_{k=0}^{\infty} x_P^\top(k) \text{diag}(700, 12, 1600, 13) x_P(k) + u^\top(k) u(k)$$

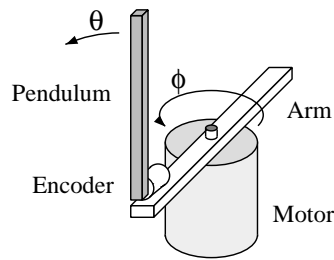
を最小にする以下のフィードバック制御器である．

$$u(k) = [-121.30 \quad -21.91 \quad 36.85 \quad 21.36] y(k)$$

つぎに， Q は，Fig. 6 の MATLAB のウィンドウ内で示される (a) ~ (f) の手順によって設計される．

まず， P と K を Table. 2 の構造体で定義し，(a) で示されるようにコマンド `compG` によって G を計算する．そして $T := 1000$ ， $d := 10$ ， $\gamma_{uv} := 1$ ， $\gamma_{wv} := 2$ とし，(b) のようにコマンド `odq` を用いて Q を求める．その結果 $N = 501$ の Q が得られ $E(Q) \simeq 0.0407$ となった．この際， T は，Pentium4 3GHz，2GB RAM の計算機において約 1 分の計算時間となるように選ばれている．また， γ_{uv} と γ_{wv} は，(8) 式を基にして， $v(k) \in \{-10, 0, 10\}$ となるように選定している．具体的には， $x_P = 0$ の近傍で $\|u(k)\| \leq 9$ となることを数値シミュレーションで確認した上で， $\|v(k)\| \leq 9\gamma_{uv} + (10/2)\gamma_{wv} = 19$ が満たされるようにした．

つぎに，この Q は次元 (N) が大きく実装には適さないため，(c) のようにコマンド `odqreal` による低次元化を行う．ここでは， \mathcal{H}^* (Hk.H) の最大特異値が約 0.9904，2 番



(a) Diagram.

(b) Overview.

Fig. 5 Inverted pendulum.

目の特異値が約 0.0097 ということをお案した上で, $\dim = 1$ と設定する. その結果はつぎの通りである.

$$Q: \mathcal{A} = 0.9903, \mathcal{B}_1 = -0.9952, \mathcal{B}_2 = -\mathcal{B}_1, \mathcal{C} = \mathcal{B}_1$$

最後に, 無限時刻先まで制御することを想定して, $T := \infty$ における Q の性能を検証する. (d) のようにコマンド `odqgain` を用いて, $\|Q_{uv}\|$ と $\|Q_{vv}\|$ の値を計算したところ, それぞれ 1, 1.9903 であり, (S2) の仕様が無限時刻先まで満たされることを確認した. また, (e) のようにコマンド `odqcost` を用いて評価関数の値を計算したところ, $E(Q) \simeq 0.0487$ となり, 振子を倒立させる上で十分な性能を有していることもわかった. さらに, 計算誤差によって, 安定性が損なわれていないことを調べるために, (f) のようにコマンド `odqstb` を実行し, Q が安定であることを確認した.

以上の手順によって, 倒立振子に対し離散値入力型制御を実現するための動的量子化器 Q が得られた.

4.2 実験結果

前節で構築した離散値入力型フィードバック制御系の動作を実機実験にて確認した.

倒立状態の近傍から制御を開始した際の応答を Fig. 7 に示す. ここで, 出力応答のグラフ (三番目) においては, 細線で ϕ , 太線で θ を示している. 3 値の離散値 $\{-10, 0, 10\}$ で構成される粗い制御入力適用されているにも関わらず, ϕ と θ の応答が原点から $\pm 0.15[\text{rad}]$ の範囲に収まっており, 良好に倒立していることがわかる.

また, Fig. 8 に Fig. 1 (a) の制御系 (連続値入力) の応答を示しているが, Fig. 7 の出力応答が Fig. 8 の出力応答に近くなっていることが観察できる. つまり, 前節で設計した動的量子化器が, 連続値入力型の制御系の性能を概ね保存していることが確認できる.

最後に，比較のため，Fig. 1 (b) の制御系において， Q として通常の四捨五入型の静的量子化器を用いた場合の応答を Fig. 9 に示す．この場合は，提案の動的量子化器を用いる場合とは異なり，出力応答の振動が大きくなっていることが見てとれる（出力軸の目盛りの大きさが異なっている点に注意）．

以上より，著者らの動的量子化器の設計理論およびそれを支援する ODQ Toolbox が，実機においても有効であることが確認できる．

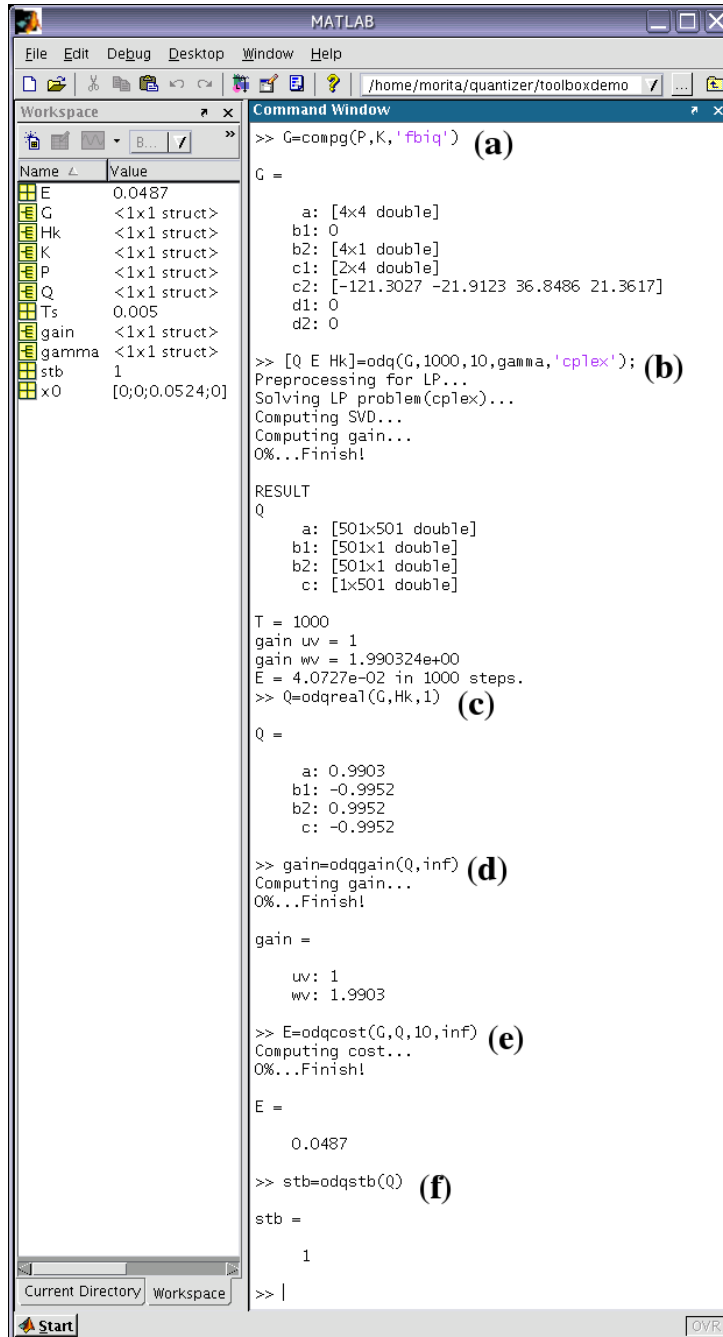


Fig. 6 Design flow of Q in MATLAB window.

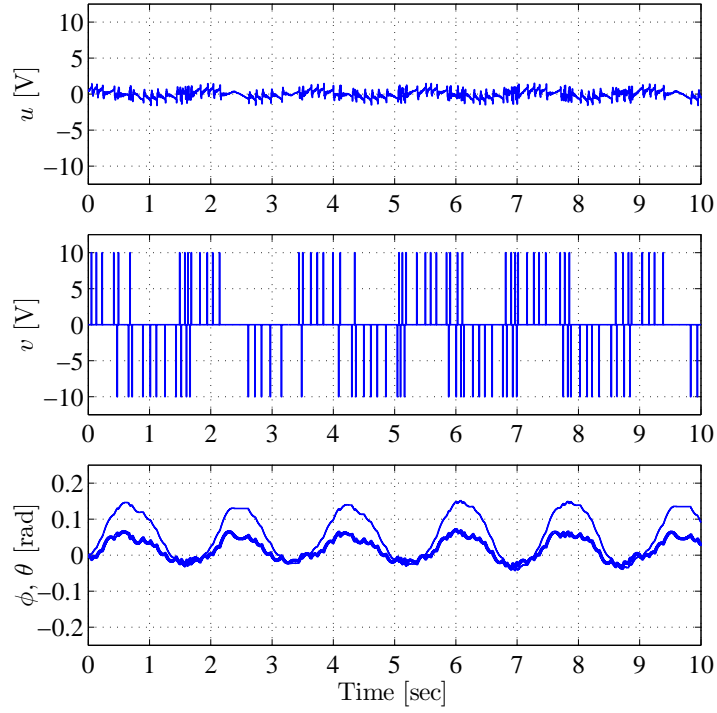


Fig. 7 Experimental result with optimal dynamic quantizer.

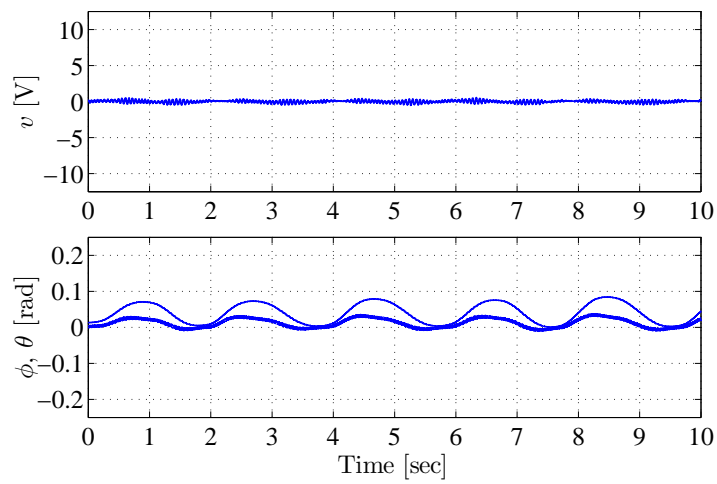


Fig. 8 Experimental result without quantizer (result with continuous-valued input).

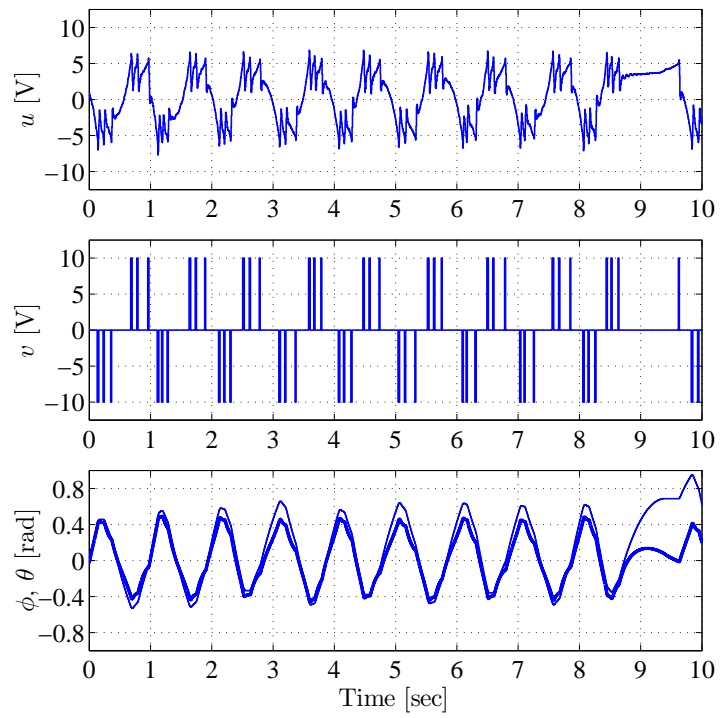


Fig. 9 Experimental result with round-off type static quantizer.

5 関数リファレンス

5.1 COMPG

COMPG LFT 形式におけるシステム G の計算

ODQToolbox では対象とするシステムを全て Fig. ?? のような形で扱います。 G は制御対象 P と制御器 K をまとめて表したものです。 Fig. 10, 11, 12 のような形で P および K が既知の場合、関数 COMPG により、Fig. 3 のような形で書き換えた場合の G を計算することができます。 Fig. 10 のようなシステムを Fig. 3(a) のように変換する場合、次のような関数を実行します。

```
>> G = COMPG(P,K,'fbiq')
```

Fig. 11 のようなシステムを Fig. 3(a) のように変換する場合、次のような関数を実行します。

```
>> G = COMPG(P,K,'fboq')
```

Fig. 12 のようなシステムを Fig. 3(a) のように変換する場合、次のような関数を実行します。

```
>> G = COMPG(P,K,'ff')
```

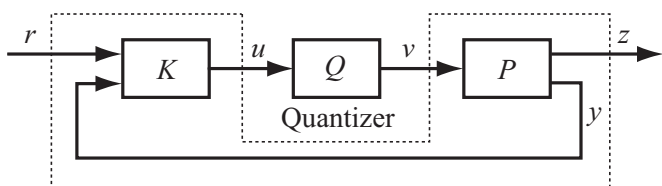


Fig. 10 Feedback system with input quantizer

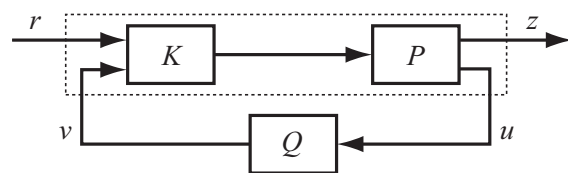


Fig. 11 Feedback system with output quantizer

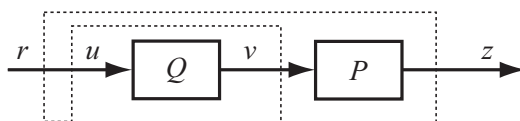


Fig. 12 Feedforward system with quantizer

5.2 ODQ

ODQ 最適動的量子化器の導出

システム G に対する，時刻 T までにおける連続値入力システムとの最大出力誤差を最小にするような，量子化間隔 d の最適動的量子化器 Q を求めるには，次のように関数を実行します．

```
>> Q = ODQ(G,T,d);
```

システムに入力飽和が存在する場合，次のように量子化器のシステムゲインに対して上限 γ を指定することで，量子化器の出力を制限することができます．

```
>> Q = ODQ(G,T,d,gamma);
```

γ は構造体で，量子化器への入力についてのゲイン拘束を $\gamma.uv$ ，量子化誤差についてのゲイン拘束を $\gamma.wv$ と指定します．

最適動的量子化器を求める際，同時に評価関数の値 E も出力する場合は次のように指定します．

```
>> [Q E] = ODQ(G,...);
```

関数 ODQ では，量子化器の次元が大きくなってしまふことがあります．低次元化するために，関数 ODQREAL に必要な変数 H_k を出力するためには次のように指定します．

```
>> [Q E Hk] = ODQ(G,...);
```

また，関数 ODQ を用いて同時に低次元化することができます．指定した次元 dim で量子化器を求めるには次のように指定します．これは内部で ODQREAL を利用しています．

```
>> [Q E Hk] = ODQ(G,T,d,gamma,dim);
```

```
>> [Q E Hk] = ODQ(G,T,d,[],dim);
```

ODQ では，内部で LP 問題を解くことがあります．標準では，そのソルバとして Optimization Toolbox に含まれる `linprog` を使用します．また，これに変えて，`ILOG CPLEX` を用いることもできます．その際は，引数を次のように指定します．

```
>> [Q E Hk] = ODQ(G,...,'cplex');
```


ヒント

T の値が大きいと、ソルバの性能や、計算機のメモリ容量の関係から計算ができないことがあります。解が得られなかった場合は T を小さくしてみてください。

5.3 ODQREAL

ODQREAL 最適動的量子化器の低次元化

関数 ODQ によって求めたシステム G に対する量子化器を，ODQ の出力 H を用いて，指定された次元 dim に低次元化するには，次のように関数を実行します．

```
>> Qred = ODQREAL(G,Hk,dim);
```

低次元化を行うことにより，ある程度の性能の劣化が生じるため，ODQREAL によって求められた量子化器は，関数 ODQCOST によって，性能を検証する必要があります．

また，次元の指定を次のようにすることで，自動化することもできます．

```
>> Qred = ODQREAL(G,Hk,'auto');
```

この際，場合によっては次元が小さくならないこともあります．

注意

通常の計算では Q が不安定になってしまうとき，安定にするために次元を大きくすることがあります．その場合は指定された次元で Q が得られない場合があります．

5.4 ODQGAIN

ODQGAIN 最適動的量子化器のゲインの計算

ODQ や ODQREAL によって求められた量子化器 Q の，評価区間 T におけるシステムゲイン gain を計算するには，次のような関数を実行します．

```
>> gain = ODQGAIN(Q,T);
```

出力される gain は構造体であり，量子化器への入力についてのゲインは gain.uv，量子化誤差についてのゲインは gain.wv で出力されます．また，T を指定しない場合，T=Inf となります．

5.5 ODQCOST

ODQCOST 最適動的量子化器の評価関数の計算

ODQ や ODQREAL によって求められた，システム G に対する量子化間隔 d の最適動的量子化器 Q の，評価区間 T における評価関数の値 E を計算するには，次のような関数を実行します．

```
>> E = ODQCOST(G,Q,d,T);
```

この値が小さければ小さいほど，性能のよい量子化器となります．また， T を指定しない場合， $T=Inf$ となります．

5.6 ODQSTB

ODQSTB 最適動的量子化器の安定判別

ODQ や ODQREAL によって求められた，最適動的量子化器の安定性を調べるには，次の関数を実行します．

```
>> stb = ODQSTB(Q)
```

量子化器が安定な場合，stb=1 となります．不安定であれば，stb=0 となります．

6 シミュレーション用 Simulink ブロック

ODQ Toolbox には、設計した最適動的量子化器を使って簡単にシミュレーションできるように、Simulink ブロックが同梱されています。odqblock.mdl はそのサンプルです。用途に応じて、このサンプルからコピー＆ペーストしてください。

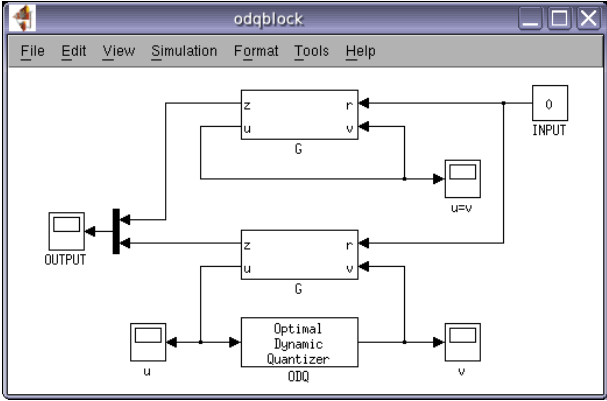


Fig. 13 odqblock.mdl

参考文献

- [1] S. Azuma and T. Sugie. Optimal dynamic quantizers for discrete-valued input control. *Automatica*, Vol. 44, No. 2, pp. 396–406, 2008.
- [2] Y. Minami, S. Azuma, and T. Sugie. Optimal dynamic quantizers for discrete-valued input feedback control. *Proc. of 46th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, pp. 2259–2264, 2007.
- [3] S. Azuma and T. Sugie. Linear programming based optimal dynamic quantizer synthesis for discrete-valued input control, *Proc. of 46th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, pp. 2253–2258 (2007)
- [4] 東, 杉江. 離散値入力型制御のための最適動的量子化器の安定性. 計測自動制御学会論文
文集, Vol. 43, No. 12, pp. 1136–1143, 2007.
- [5] S. Azuma and T. Sugie. Stability analysis of quantized feedback systems including
optimal dynamic quantizers, *submitted to Proc. of 47th IEEE Conf. on Dec. and
Contr.*, 2008.
- [6] <http://www.robot.kuass.kyoto-u.ac.jp/odq.html>.
- [7] <http://www.mathworks.com/>.
- [8] <http://www.ilog.com/>.
- [9] <http://control.ee.ethz.ch/~hybrid/>.
- [10] B. L. Ho and R. E. Kalman. Effective construction of linear state-variable models
from input/output functions, *Regelungstechnik*, Vol. 14, pp. 545–548, 1966.